



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
METROPOLITANA

UNIDAD IZTAPALAPA

Posgrado en Ciencias (Matemáticas)

LA GRÁFICA DE ÁRBOLES CON
GRADOS FIJOS

Tesis

QUE PRESENTA:

JULIÁN ALBERTO FRESÁN FIGUEROA

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Asesor de la tesis:

DR. EDUARDO RIVERA CAMPO

Diciembre, 2012

Índice general

Resumen	1
Introducción	3
1. Conocimientos Preliminares	5
2. La Gráfica de Árboles	11
2.1. Gráficas Abstractas	11
2.2. Gráficas Geométricas	19
3. La Gráfica de Árboles con Grados Fijos	21
Conclusiones	35
Referencias	37

Índice de figuras

1.1. Dibujo de P_5	6
1.2. Gráfica regular.	6
1.3. La gráfica K_5 , una subgráfica inducida de K_5 y una subgráfica generadora de K_5	7
1.4. G , $G - \{v_2, v_4\}$ y $G + \{v_1, v_3\}$	7
1.5. Una trayectoria hamiltoniana de K_6 y un ciclo hamiltoniano de K_5	8
1.6. Ejemplo de árbol enraizado	9
2.1. $T(K_3)$	12
2.2. T_1T_2 , $\beta - T_3T_2$, T_3T_4 y $\alpha - T_1T_4$ forman un ciclo hamiltoniano de $T(G)$	13
2.3. Construcción de una secuencia de Prüfer.	15
2.4. Construcción de un árbol a partir de una secuencia de Prüfer.	16
2.5. $T(K_4)$ en posición convexa	20
3.1. $T_\sigma(K_5)$ con $\sigma = (1, 1, 1, 2, 3)$	22
3.2. Adyacencia.	22
3.3. Biyección entre árboles en H_{u_i} y $T_{\lambda_{u_i}}(K_n - v)$	24
3.4. Caso base de la inducción sobre conexidad, $n = 4$	26
3.5. Caso base de la inducción sobre hamiltonicidad de las trayectorias, $n = 5$	29
3.6. Un ciclo hamiltoniano en $T_\sigma(K_7)$ con $\sigma = (1, 1, 2, 2, 2, 2, 2)$	30
3.7. $\bar{T}_\sigma(K_6)$ con distintas permutaciones de la sucesión arbórea $\sigma = (1, 1, 1, 1, 3, 3)$	32
3.8. Caso base de la conexidad de trayectorias en el caso geométrico, $n = 4$	33

Resumen

La gráfica de árboles de una gráfica conexa G es la gráfica $T(G)$ cuyos vértices son todos los árboles generadores de G , en la cual dos árboles P y Q son adyacentes si existen aristas p de P y q de Q tales que $Q = (P - p) + q$.

En este trabajo consideramos una variación de la gráfica de árboles: sea σ una asignación de grados de tamaño n . La gráfica de árboles de K_n con respecto a σ es la gráfica $T_\sigma(K_n)$ que tiene como vértices a los árboles generadores de K_n con los mismos grados que σ ; es decir aquellos árboles S tales que $d_S(u) = \sigma(u)$ para todo vértice u de K_n . En $T_\sigma(K_n)$ dos árboles P y Q son adyacentes si existen aristas p y r de P no incidentes y aristas q y s de Q no incidentes tales que $Q = (P - \{p, r\}) + \{q, s\}$.

En los capítulos 2 y 3 presentamos algunos de los resultados sobre $T_\sigma(K_n)$ relacionados con su estructura y hamiltonicidad.

Introducción

When you make the finding yourself
-even if you're the last person on Earth to see the light-
you'll never forget it.

Carl Sagan

La gráfica de árboles de una gráfica conexa G es la gráfica $T(G)$ cuyos vértices son todos los árboles generadores de G , en la cual dos árboles P y Q son adyacentes si existen aristas p de P y q de Q tales que $Q = (P - p) + q$. Este movimiento puede verse como agregar una arista q a un árbol P lo cual genera un único ciclo en $P + q$ y después quitar una arista p distinta a la arista q y que pertenezca al único ciclo en $P + q$, para obtener un nuevo árbol Q . Es bien conocido que la gráfica $T(G)$ siempre es conexa. Un resultado mas profundo se debe a Cummins [3] y afirma que si G tiene al menos tres árboles generadores, entonces la gráfica $T(G)$ tiene un ciclo hamiltoniano.

En este trabajo consideramos una variación de la gráfica de árboles: sea $n \geq 2$ un entero y sea σ una sucesión de grados de un árbol de orden n . La gráfica de árboles de K_n con respecto a σ es la gráfica $T_\sigma(K_n)$ que tiene como vértices a los árboles generadores de K_n con los mismos grados que σ ; es decir aquellos árboles S tales que $d_S(u) = \sigma(u)$ para todo vértice u de K_n . En $T_\sigma(K_n)$ dos árboles P y Q son adyacentes si existen aristas p y r de P , sin vértices en común, y aristas q y s de Q , también sin vértices en común,

tales que $Q = (P - \{p, r\}) + \{q, s\}$. Análogamente a la gráfica de árboles, este movimiento puede verse como quitar y poner dos aristas no adyacentes de tal manera que se conserven los grados, la conexidad y que no se formen ciclos.

En el Capítulo 1 presentamos los conocimientos previos que permiten plantear esta variación formalmente, así como, la notación que se emplea en el resto del documento. Introducimos también las definiciones de las propiedades que hemos estudiado en la gráfica de árboles con grados fijos. En el Capítulo 2 hacemos una breve reseña sobre algunos resultados relevantes sobre la gráfica de árboles tanto en el caso abstracto como en el caso geométrico que es cuando fijamos en el plano los puntos correspondientes a los vértices. Por último en el Capítulo 3 presentamos los resultados obtenidos acerca de la gráfica de árboles con grados fijos, que son originales de este trabajo. Mostramos propiedades como el diámetro, conexidad y hamiltonicidad acerca de $T_\sigma(K_n)$ y estudiamos también el caso geométrico.

Capítulo 1

Conocimientos Preliminares

En esta tesis se usará terminología estándar de Teoría de Gráficas como se puede encontrar en [4]. Empecemos con la definición de gráfica:

Definición 1. *Una gráfica, G , es una pareja de conjuntos (V, E) donde V es un conjunto finito no vacío y $E \subseteq 2^V$ tal que los elementos de E tienen cardinalidad dos.*

Por ejemplo una gráfica sería:

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}\}$$

En una gráfica $G = (V, E)$ al conjunto V se le conoce como el conjunto de *vértices* y al conjunto E se le conoce como el conjunto de *aristas*. Denominaremos orden al valor de $|V|$ y tamaño al de $|E|$. En ocasiones es útil, al referirnos a los conjuntos de vértices y aristas, indicar explícitamente la gráfica de la que hablamos, por lo que los denotaremos como $V(G)$ y $E(G)$.

Al trabajar con gráficas es natural representarlas con diagramas: representaremos al conjunto de vértices como un conjunto de puntos y al conjunto de aristas como líneas entre ellos. Como el dibujo de una gráfica la describe completamente, es usual referirse a dicho dibujo como a la gráfica en

sí misma. Usando esta diagramática podemos representar -dibujar- la gráfica antes definida, llamada P_5 con el dibujo que aparece en la figura 1.1.

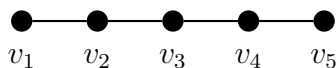


Figura 1.1: Dibujo de P_5

Si $\{u, v\} \in E$ diremos que los vértices u y v son *adyacentes* o *vecinos*. Al número de vértices adyacentes a un vértice $v \in V(G)$ se le conoce como el *grado* de v y se denota como $d_G(v)$. Al menor y al mayor de los grados de los vértices de una gráfica se les denomina grado mínimo y grado máximo y se denotan $\delta(G)$ y $\Delta(G)$, respectivamente. Diremos que dos aristas son *incidentes* si comparten un vértice. Una gráfica es *k-regular* si todos sus vértices tienen grado k , en la figura 1.2 podemos ver una gráfica 3-regular.

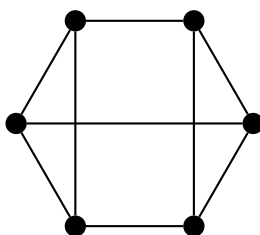


Figura 1.2: Gráfica regular.

En algunas ocasiones denotaremos por uv a la arista $\{u, v\}$. Si entre cualesquiera dos vértices de una gráfica existe una arista, entonces diremos que la gráfica es *completa*. A la gráfica completa con n vértices la denotaremos K_n . Si $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ son dos gráficas tales que $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$, entonces diremos que G' es una subgráfica de G y se denota $G' \subseteq G$. En particular si $G' \subseteq G$ y G' contiene todas las aristas $\{x, y\} \in E$ con $x, y \in V'$ entonces diremos que G' es una *subgráfica inducida* de G . Si $V' = V$ entonces diremos que G' es una *subgráfica generadora* de G . En la figura 1.3

podemos observar la gráfica completa K_5 , una subgráfica inducida de K_5 y una generadora de K_5 .

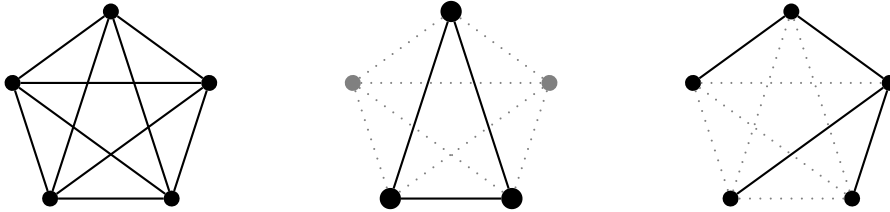


Figura 1.3: La gráfica K_5 , una subgráfica inducida de K_5 y una subgráfica generadora de K_5 .

Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ dos gráficas. Diremos que G y G' son *isomorfas*, lo que denotaremos $G \sim G'$, si existe una función biyectiva $\phi : V \rightarrow V'$ tal que $\{x, y\} \in E$ si y solo si $\{\phi(x), \phi(y)\} \in E'$. A dicha función biyectiva se le llama isomorfismo. Sea $\{u, v\}$ una arista de una gráfica $G = (V, E)$, definimos $G - \{u, v\}$ como la gráfica que se obtiene al quitar la arista $\{u, v\}$ del conjunto E . Si $\{x, y\}$ no es arista de G , definimos $G + \{x, y\}$ como la gráfica que resulta al agregar la arista $\{x, y\}$. En la figura 1.4 podemos ver un ejemplo de estas operaciones.

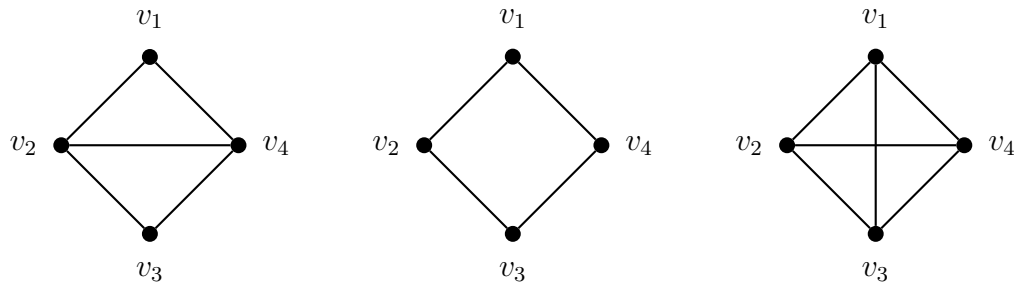


Figura 1.4: G , $G - \{v_2, v_4\}$ y $G + \{v_1, v_3\}$

Una *trayectoria* es una sucesión $P = v_1, v_2, \dots, v_n$ de vértices distintos de G tales que v_i y v_{i+1} son adyacentes para $i = 1, 2, \dots, n-1$. A los vértices v_1 y v_n les llamaremos *vértices terminales* de la trayectoria. En algunas ocasiones es

conveniente especificar los vértices terminales al referirnos a una trayectoria, por lo que le llamaremos una v_1v_n -trayectoria a la trayectoria que tenga dichos vértices terminales. Si $P = v_1, v_2, \dots, v_n$ es una v_1v_n -trayectoria y $v_0 \notin P$ es adyacente a v_1 podemos agregar a la trayectoria P el vértice v_0 y construir una nueva trayectoria a la que denotaremos $v_0P = v_0v_1, v_2, \dots, v_n$. Un *ciclo* C es una trayectoria $v_1, v_2, \dots, v_n, n \geq 2$, junto con la arista $\{v_n, v_1\}$. Diremos que una trayectoria o un ciclo es *hamiltoniano* si pasa por todos los vértices de la gráfica. En la figura 1.5 vemos ejemplos de una trayectoria hamiltoniana y un ciclo hamiltoniano de K_6 y K_5 , respectivamente.



Figura 1.5: Una trayectoria hamiltoniana de K_6 y un ciclo hamiltoniano de K_5 .

Una gráfica G es *conexa* si para cualesquiera $x, y \in V(G)$ existe una xy -trayectoria contenida en G . Un *conjunto de corte* $S \subset V(G)$ es un conjunto de vértices tal que $G - S$ no es conexo. Si una gráfica T es conexa y no tiene ciclos, entonces diremos que T es un *árbol*. A los vértices de grado 1 en un árbol los llamaremos *vértices terminales* u *hojas*. Es fácil ver que un árbol con n vértices tiene $n - 1$ aristas, que entre cualesquiera $x, y \in V(T)$ existe una única xy -trayectoria y que todo árbol con $n \geq 2$ vértices tiene al menos dos vértices terminales.

La *distancia* entre dos vértices u y v de una gráfica conexa es la longitud de la trayectoria mas corta entre ellos, y se denota $D(u, v)$. El *diámetro* de una gráfica G es el máximo de las distancias entre todas las parejas de vértices de G , se denotará $diam(G)$. A veces es conveniente considerar un vértice de manera especial; a ese vértice le llamaremos *raíz* del árbol. Los vértices a distancia k de la raíz diremos que forman el k -ésimo nivel del árbol. En la figura 1.6 vemos un ejemplo de árbol enraizado donde podemos observar los detalles que antes mencionamos.

En este trabajo en particular estamos interesados en los árboles generadores

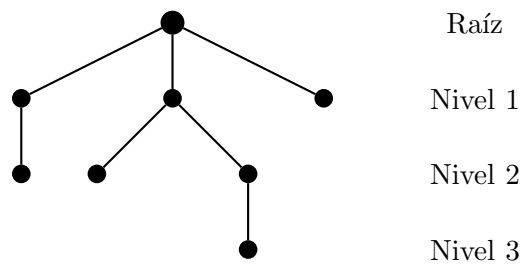


Figura 1.6: Ejemplo de árbol enraizado

de una gráfica G dada, es decir, los árboles T tales que $V(T) = V(G)$. Se sabe que toda gráfica conexa contiene al menos un árbol de este tipo. Los árboles generadores han sido muy estudiados debido a las diversas aplicaciones que tienen en problemas de optimización combinatoria.

Capítulo 2

La Gráfica de Árboles

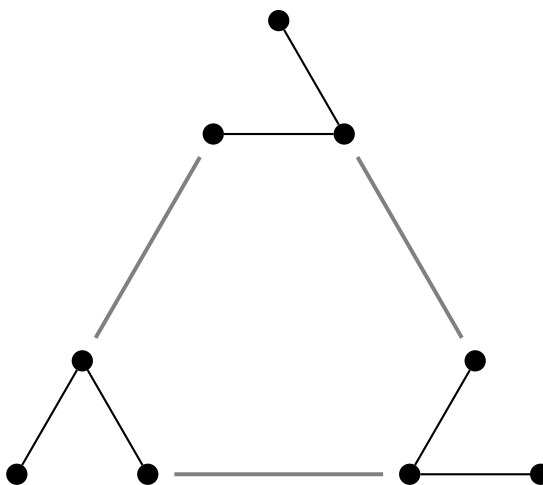
2.1. Gráficas Abstractas

La *gráfica de árboles* de una gráfica G es la gráfica $T(G)$ cuyos vértices son todos los árboles generadores de G , en la cual dos árboles P y Q son adyacentes si existen aristas p de P y q de Q tales que $Q = (P - p) + q$. Por ejemplo en el caso de que la gráfica sea K_3 la gráfica de árboles $T(K_3)$ sería la que se puede observar en la figura 2.1.

Podemos ver que dos árboles son adyacentes si eliminamos una arista y conectamos con otra las dos componentes que se forman. Es fácil ver el siguiente resultado:

Teorema 1. *Si G es una gráfica conexa, entonces $T(G)$ también lo es.*

Demostración: Sea G una gráfica conexa con n vértices, sean T y T' dos árboles generadores de G distintos y sea $S = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ el conjunto de las k aristas que están en T y no están en T' . Claramente $k \geq 1$ pues son árboles distintos. Como cada árbol generador tiene $n - 1$ aristas, entonces también existe un conjunto $S' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_k\}$ de aristas que están en T' y no en T . Entonces $T + e'_1$ contiene un único ciclo al que denotaremos Te'_1 . Como T' es un árbol entonces al menos una arista en Te'_1 no está en T' y por lo tanto está en S . Sin pérdida de generalidad supongamos que esa arista es e_1 .

Figura 2.1: $T(K_3)$

Definamos $T_1 = T - e_1 + e'_1$, por lo tanto T_1 es adyacente a T , además T_1 y T' tienen una arista más en común.

Repitiendo este proceso $k - 1$ veces obtendremos una sucesión de árboles generadores $T_0 = T, T_1, T_2, \dots, T_{k-1}, T_k = T'$ tales que $T_i T_{i+1} \in E(T(G))$ para $0 \leq i \leq k - 1$ ■

Un *bosque generador maximal* de una gráfica G es una subgráfica que consiste en un árbol generador en cada componente de G . Podemos definir la gráfica de bosques generadores maximales de manera similar a la de árboles para gráficas con varias componentes conexas. Un resultado importante acerca de la gráfica de bosques generadores maximales es el siguiente, debido a Cummins [3]. La prueba que presentamos es debida a Shank [8].

Teorema 2. *Si G es una gráfica con al menos un ciclo, entonces toda arista de la gráfica de bosques generadores maximales $T(G)$ está en un ciclo hamiltoniano.*

Demostración: Supongamos, sin pérdida de generalidad, que toda arista de G está en un ciclo, ya que, si alguna arista e no lo está, entonces e se encuentra en todo árbol generador y $T(G) = T(G - e)$.

Si G tiene sólo un ciclo C , entonces $T(G)$ es una gráfica completa ya que cada árbol generador es de la forma $G - e$ donde e es una arista del ciclo C y por ello cada vértice de $T(G)$ es adyacente a todos los demás. De igual manera si G tiene sólo un conjunto de corte la gráfica es completa ya que nuevamente cada árbol generador está asociado a elegir una arista del conjunto de corte y quitar las demás.

En estos dos casos la afirmación se cumple trivialmente, por ello, supongamos que G tiene más de un ciclo y más de un conjunto de corte. Supongamos además que T_1 y T_2 son adyacentes en $T(G)$ con $T_1 + b_1 = T_2 + b_2$ y que el resultado es verdadero para todas las gráficas con menos aristas que G .

Como G tiene otro ciclo además de $T_1b_1 = T_2b_2$, entonces G tiene una arista b que no está ni en T_1 ni en T_2 . Además, dado que G tiene al menos dos conjuntos de corte, no puede suceder que para cada arista b que no esté ni en T_1 ni en T_2 , se tenga que el ciclo T_1b esté formado por las dos aristas b y b_2 y que el ciclo T_2b este formado por las dos aristas b y b_1 . Por lo anterior, sin pérdida de generalidad podemos escoger dos aristas b y b_0 tales que $b \notin T_1 \cup T_2$, $b_0 \in T_1 \cap T_2$ y $b_0 \in T_2b - b$.

Sea $T_3 = T_2 + b - b_0$. Si $b_0 \in T_1b_1$ sea $T_4 = T_1 + b - b_0$, si $b_0 \notin T_1b_1$ sea $T_4 = T_1 + b - b_2$. En los dos casos hay un ciclo T_1, T_2, T_3, T_4 . Notemos que tanto T_1 como T_4 no contienen a la arista b_1 , por lo que son una arista en

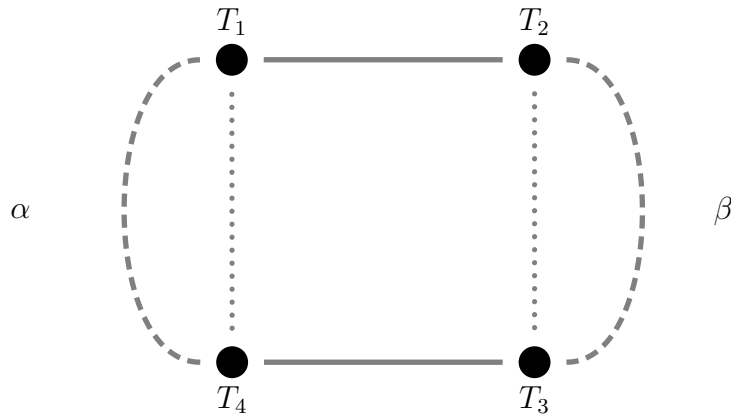


Figura 2.2: T_1T_2 , $\beta - T_3T_2$, T_3T_4 y $\alpha - T_1T_4$ forman un ciclo hamiltoniano de $T(G)$.

$T(G - b_1)$. De igual manera T_2 y T_3 son una arista en $T(G_{b_1})$ donde G_{b_1} es la gráfica que se obtiene al contraer b_1 en G . Por hipótesis de inducción hay un ciclo hamiltoniano α en la gráfica $T(G - b_1)$ que contiene a la arista T_1T_4 y un ciclo hamiltoniano β en la gráfica $T(G_{b_1})$ que contiene a la arista T_2T_3 . Por lo que la arista T_1T_2 junto con la trayectoria $(\beta - T_3T_2)$, la arista T_3T_4 y la trayectoria $(\alpha - T_1T_4)$ forman un ciclo hamiltoniano de $T(G)$ que contiene a la arista T_1T_2 . En la figura 2.2 vemos un diagrama de la demostración. ■

Conocer el número de árboles generadores de una gráfica G nos dice el orden de la gráfica $T(G)$. Para el caso de las gráficas completas tenemos el siguiente resultado debido a Cayley [2] y presentamos la prueba de Prüfer [7].

Teorema 3. Si $n \geq 2$, entonces el número de árboles generadores de K_n es n^{n-2} .

Demostración: Es fácil ver que el número de árboles generadores de K_n es exactamente el número de árboles etiquetados de orden n . Sea T un árbol con n vértices y etiquetemos los vértices de T con los números del 1 al n .

Removamos de T el vértice terminal que tenga la menor etiqueta, digamos u_1 . Sea v_1 el vértice adyacente a u_1 en T . De los $n-1$ vértices restantes, sea u_2 el vértice terminal con la menor etiqueta y sea v_2 el único vértice adyacente a él en $T - u_1$. Removamos ahora el vértice u_2 de $T - u_1$ y repitamos esta operación hasta que sólo queden 2 vértices. Esto nos define una única sucesión $(v_1, v_2, \dots, v_{n-2})$ de $n-2$ enteros, todos entre 1 y n . A esta sucesión se le conoce como *Sucesión de Prüfer*. En la figura 2.3 se muestra un ejemplo de construcción de una sucesión de Prüfer.

De igual manera, dada una sucesión $S = (v_1, v_2, \dots, v_{n-2})$ de $n-2$ enteros entre 1 y n , no necesariamente distintos, podemos contruir un único árbol de n vértices de la siguiente manera: Determinemos cuál número de la sucesión $Q = (1, 2, \dots, n)$ es el primero que no aparece en la sucesión S . Llamemos u_1 a ese número. Entonces diremos que el árbol tiene la arista u_1v_1 . Removamos a v_1 de la sucesión S y a u_1 de la sucesión Q . En lo que queda de la sucesión Q determinemos cual es el primer número que no aparece en lo restante de la sucesión S . Sea u_2 este número e inclumos a nuestro árbol la arista u_2v_2 . Repetimos estos pasos hasta que la sucesión S no tenga ningún elemento más. Finalmente hagamos adyacentes los últimos dos vértices que aparecen en Q . En la figura 2.4 podemos ver la reconstrucción del árbol de la figura 2.3.

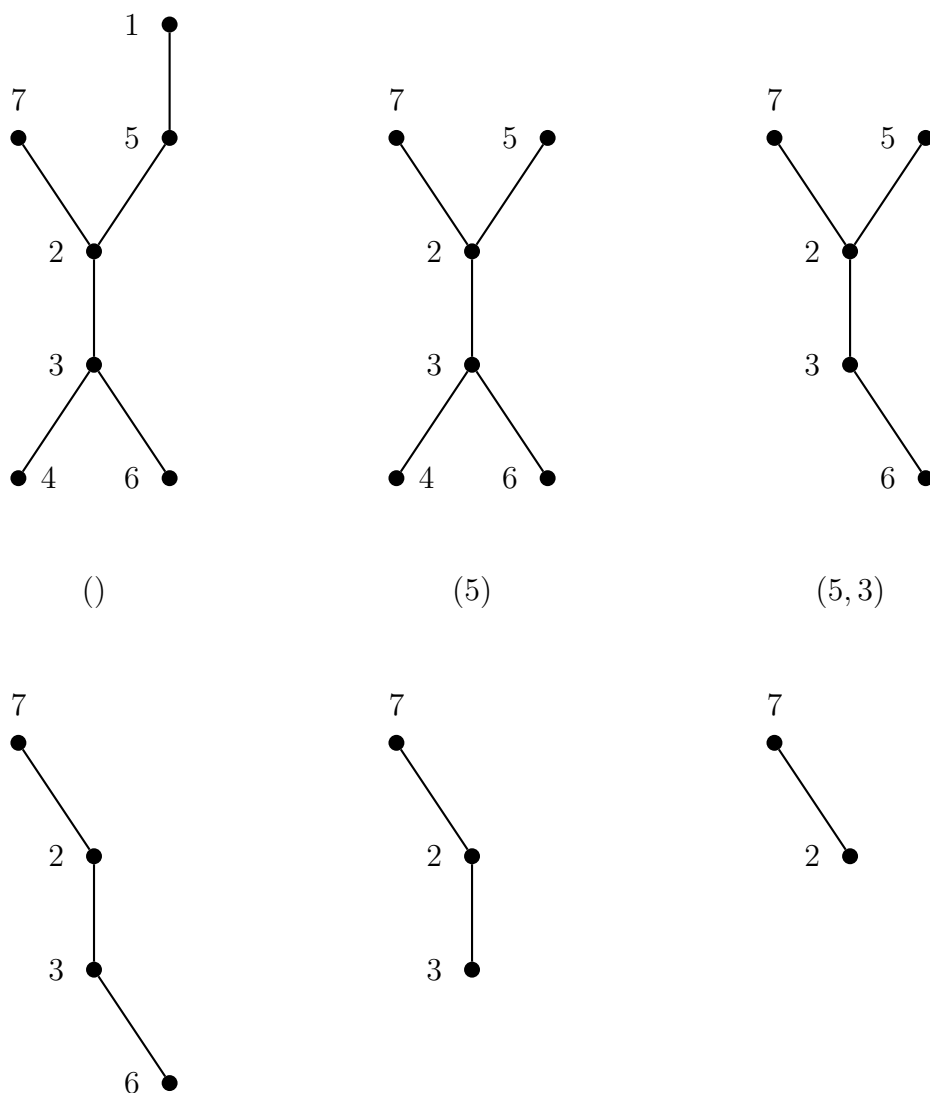
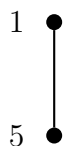


Figura 2.3: Construcción de una secuencia de Prüfer.

Esto nos define una biyección entre los árboles de n vértices y las sucesiones de $n - 2$ enteros entre 1 y n , por lo que los dos conjuntos deben tener la misma cardinalidad. Como en cada término de la sucesión podemos elegir cualquier número del 1 al n , entonces se pueden formar n^{n-2} sucesiones, por lo que se tiene el resultado. ■

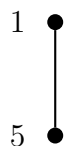
$$Q = (2, 3, 4, 5, 6, 7)$$

$$S = (3, 2, 3, 2)$$



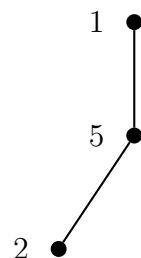
$$Q = (2, 3, 5, 6, 7)$$

$$S = (2, 3, 2)$$



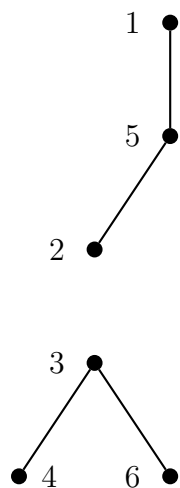
$$Q = (2, 3, 6, 7)$$

$$S = (3, 2)$$



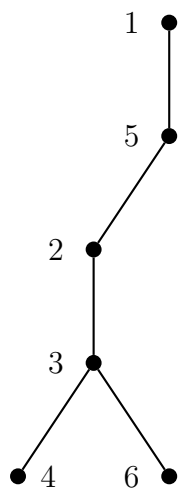
$$Q = (2, 3, 7)$$

$$S = (2)$$



$$Q = (2, 7)$$

$$S = ()$$



$$Q = ()$$

$$S = ()$$

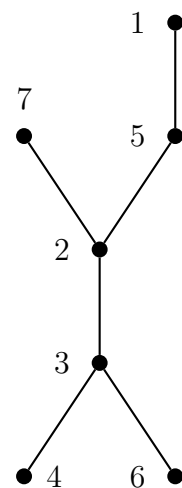


Figura 2.4: Construcción de un árbol a partir de una secuencia de Prüfer.

Una sucesión de n enteros $\sigma = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ es una *sucesión arbórea* si

1. $1 \leq d_i \leq n - 1$ para $i = 1, 2, \dots, n$
2. $d_1 + d_2 + \dots + d_n = 2(n - 1)$

Claramente una sucesión σ es arbórea si y solo si existe un árbol generador T de K_n tal que $d_T(u) = \sigma(u)$ para todo vértice u de K_n . Del análisis de la demostración anterior surgió un resultado más fuerte que es el siguiente:

Teorema 4. *Sea $n \geq 2$ un entero y $\sigma = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ una sucesión arbórea. El número de árboles generadores T de K_n tales que $d_T(u) = \sigma(u)$ para todo vértice u de K_n está dado por:*

$$\binom{n-2}{(d_1-1), (d_2-1), \dots, (d_n-1)}$$

Demostración: Se hará por inducción sobre n . El resultado es obvio para $n = 2$ pues la única sucesión arbórea es $(1, 1)$. Claramente esta sucesión cumple con el resultado ya que

$$\binom{n-2}{(d_1-1), (d_2-1)} = \binom{2-2}{(1-1)(1-1)} = 1$$

Ahora supongamos como hipótesis de inducción que el resultado se cumple para todas las sucesiones de tamaño n . Sea T_{n+1} un árbol que realice la secuencia arbórea $D = d_1, d_2, \dots, d_n, d_{n+1}$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $d_{n+1} = 1$. Al remover v_{n+1} obtenemos un árbol T_n cuyos vértices son $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ con grados $d_1, \dots, d_{j-1}, d_j - 1, \dots, d_n$ donde v_j era el único vértice adyacente a v_{n+1} en T_{n+1} . Entonces por hipótesis de inducción el número de árboles con la sucesión de T_n es

$$\binom{n-2}{(d_1-1), \dots, (d_{j-1}-1), (d_j-1-1), \dots, (d_n-1)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(n-2)!}{((d_1-1)! \dots (d_{j-1}-1)!(d_j-1-1)! \dots (d_n-1)!)} \\
&= \frac{(n-2)!(d_j-1)}{((d_1-1)! \dots (d_{j-1}-1)!(d_j-1)(d_j-2)! \dots (d_n-1)!)} \\
&= \frac{(n-2)!(d_j-1)}{((d_1-1)! \dots (d_{j-1}-1)!(d_j-1)! \dots (d_n-1)!)} \\
&= \frac{(n-2)!(d_j-1)}{\prod_{i=1}^{n+1} (d_i-1)!}
\end{aligned}$$

Como v_j puede ser cualquiera de los vértices v_1, v_2, \dots, v_n entonces el número de árboles con la sucesión σ es

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n \frac{(n-2)!(d_j-1)}{\prod_{i=1}^{n+1} (d_i-1)!} &= \frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^{n+1} (d_i-1)!} \sum_{j=1}^{n+1} (d_j-1)! \quad \text{porque } d_{n+1} = 1 \\
&= \frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^{n+1} (d_i-1)!} (n-1) \quad \text{porque } \sum_{j=1}^{n+1} (d_j-1) = n-1 \\
&= \frac{(n-1)!}{\prod_{i=1}^{n+1} (d_i-1)!} \\
&= \binom{n-1}{(d_1-1), (d_2-1), \dots, (d_{n+1}-1)}
\end{aligned}$$

■

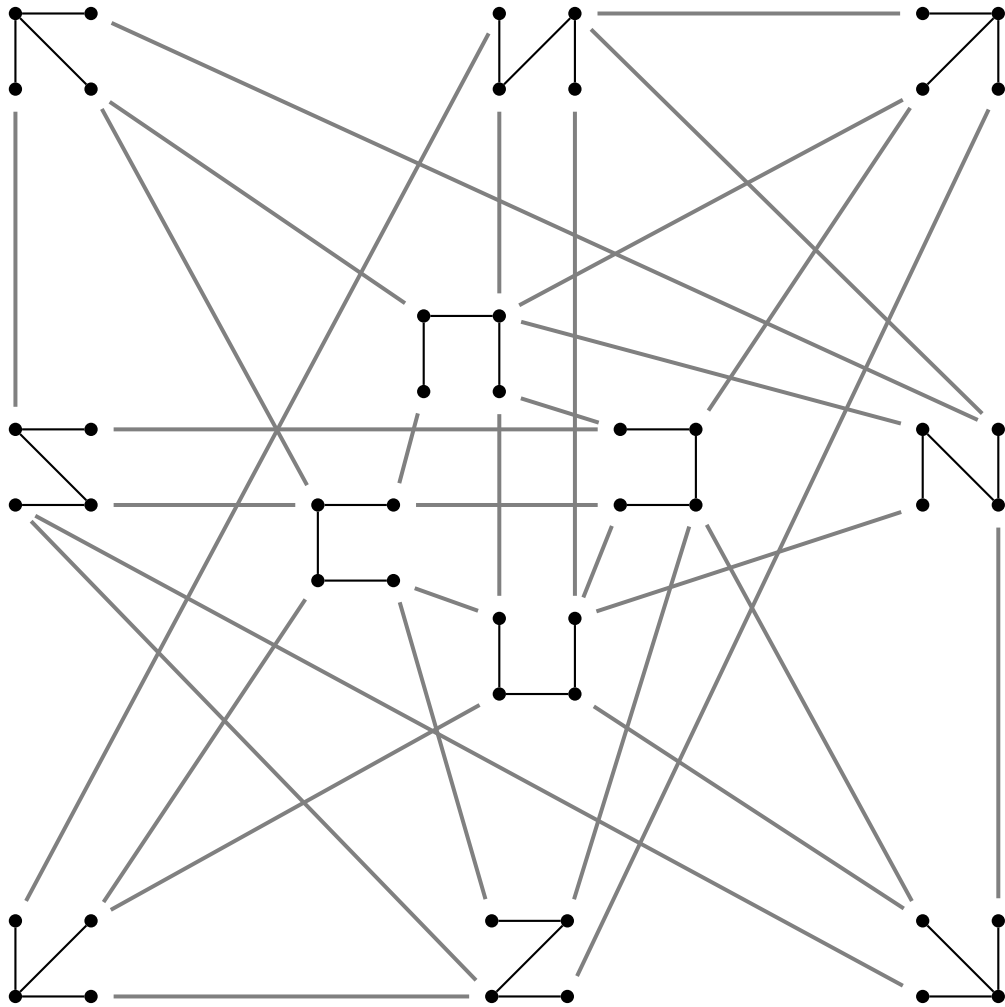
2.2. Gráficas Geométricas

Sea P un conjunto de p puntos en posición general en el plano. Una gráfica geométrica con conjunto de vértices P es una gráfica G dibujada en el plano de tal manera que sus aristas son segmentos de recta con extremos en P . Denotaremos por $K(P)$ a la gráfica geométrica completa con conjunto de vértices P .

La gráfica de árboles $T(P)$ de P es la subgráfica de la gráfica $T(K_p)$ de árboles de $K(P)$ inducida por el conjunto de árboles generadores planos -sin cruces- de $K(P)$. D. Avis y K. Fukuda [1] demostraron que la gráfica $T(P)$ es conexa para todo conjunto de puntos P en posición general en el plano.

Un conjunto de puntos P en el plano está en posición convexa si P es el conjunto de vértices de un polígono convexo. Para el caso en que P es un conjunto de puntos en el plano en posición convexa, C. Hernando *et al* [5] demostraron que $T(P)$ es una gráfica hamiltoniana. También E. Rivera-Campo y V. Urrutia-Galicia [6] probaron que si los puntos están en posición convexa, la subgráfica de $T(P)$ inducida por las trayectorias generadoras contiene un ciclo hamiltoniano. En la figura 2.5 vemos la gráfica inducida por los árboles planos K_4 cuyos vértices están en posición convexa.

En este trabajo estudiaremos una variante de la gráfica de árboles, cuando restringimos la sucesión de grados que pueden tener los árboles generadores.

Figura 2.5: $T(K_4)$ en posición convexa

Capítulo 3

La Gráfica de Árboles con Grados Fijos

Sea $n \geq 2$ y sea $\sigma = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ una sucesión arbórea. La gráfica de árboles con respecto a σ , a la que denotaremos como $T_\sigma(K_n)$, tiene como vértices a todos los árboles generadores de K_n con la asignación de grados σ , es decir, aquellos árboles S tales que $d_S(u) = \sigma(u)$ para todo vértice u de K_n . En $T_\sigma(K_n)$ dos vértices que corresponden a dos árboles P y Q son adyacentes si existen aristas p y r de P no incidentes y aristas q y s de Q no incidentes tales que $Q = (P - \{p, r\}) + \{q, s\}$. Es fácil ver que si tenemos una sucesión arbórea σ y permutamos sus elementos para obtener otra sucesión σ_2 , las gráficas $T_{\sigma_1}(K_n)$ y $T_{\sigma_2}(K_n)$ serán isomorfas, por lo que en general se verán las sucesiones en orden creciente. En la Figura 3.1 mostramos a la gráfica $T_\sigma(K_5)$ para la sucesión $\sigma = (1, 1, 1, 2, 3)$.

Notemos que esta condición de adyacencia puede verse como quitar y poner dos aristas no adyacentes de tal manera que se conserven los grados, la conexidad y que no se formen ciclos; esta operación nos da una única manera de poner las nuevas aristas. Podemos ver en la Figura 3.2 que al quitar las aristas punteadas pasamos al otro árbol y por lo tanto los vértices correspondientes a estos dos árboles son adyacentes en $T_\sigma(K_5)$ como se puede ver en la Figura 3.1. Al ver la adyacencia de esta forma, podemos observar que el grado de un vértice en $T_\sigma(K_n)$ que corresponde a un árbol P está dado por el número de pares de aristas no incidentes de P .

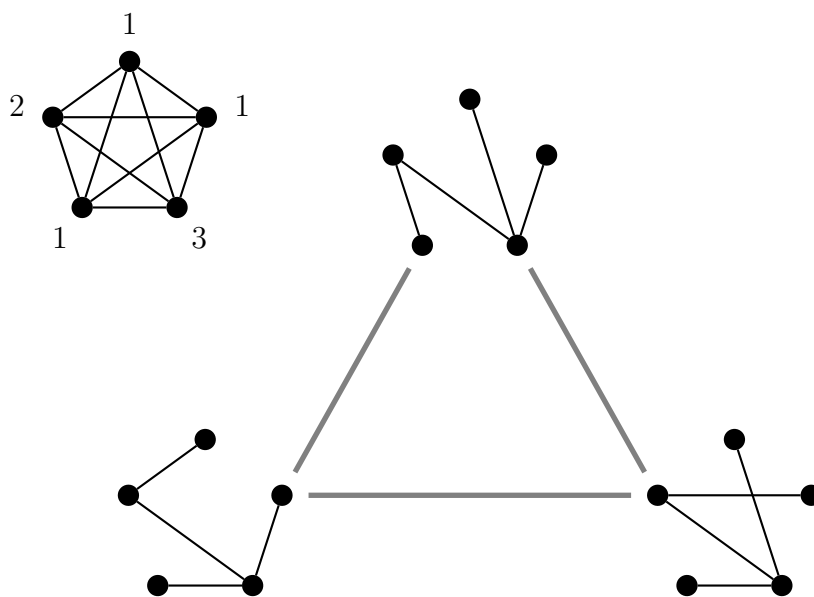


Figura 3.1: $T_\sigma(K_5)$ con $\sigma = (1, 1, 1, 2, 3)$.

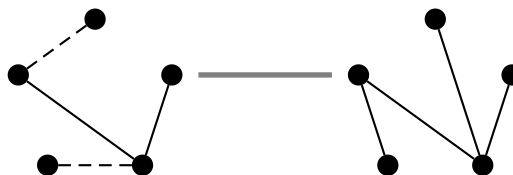


Figura 3.2: Adyacencia.

Mediante un argumento de conteo tenemos el siguiente resultado:

Teorema 5. Para toda sucesión arbórea σ , la gráfica $T_\sigma(K_n)$ es regular de grado $\binom{n}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\Delta} i^2 n_i$, donde n_i es el número de veces que aparece i en σ y Δ es el entero más grande en σ .

Para ello usaremos el siguiente lema:

Lema 1. $\sum_{\{u,v\} \in E(P)} d_P(u) + d_P(v) = \sum_{i=1}^{\Delta} i^2 n_i$

Demostración: Se sigue directo de que $d_P(u)$ aparece $d_P(u)$ veces al hacer la suma. ■

Demostración: Sea σ una sucesión arbórea, sea P un árbol correspondiente a un vértice en $T_\sigma(K_n)$ y sea $e = \{u, v\}$ una arista de P . El número de aristas incidentes a la arista e en P está dado por $d_P(u) + d_P(v) - 1$ ya que al sumar $d_P(u)$ y $d_P(v)$ contamos dos veces a la arista e . Por lo tanto el número de aristas de P no incidentes a e es $n - 1 - (d_P(u) + d_P(v) - 1) = n - d_P(u) - d_P(v)$.

Si ahora sumamos sobre todas las aristas y dividimos entre 2, contaremos cada posible pareja por lo que el grado del vértice correspondiente a P en $T_\sigma(K_n)$ es

$$\begin{aligned} d_{T_\sigma(K_n)}(P) &= \sum_{\{a,b\} \in E(P)} \frac{n - d_P(a) - d_P(b)}{2} \\ &= \frac{n(n-1)}{2} - \sum_{\{a,b\} \in E(P)} \frac{d_P(a) + d_P(b)}{2} \\ &= \binom{n}{2} - \sum_{\{a,b\} \in E(P)} \frac{d_P(a) + d_P(b)}{2} \end{aligned}$$

Entonces por el Lema 1, se tiene que

$$d_{T_\sigma(K_n)}(P) = \binom{n}{2} - \frac{\sum_{i=1}^{\Delta} i^2 n_i}{2}$$

■

De la prueba de Prüfer del teorema de Cayley, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 6. Sea $n \geq 2$ un entero. Para toda sucesión arbórea $\sigma = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ el orden de $T_\sigma(K_n)$ es $\binom{n-2}{d_1-1, d_2-1, \dots, d_n-1}$.

Demostración: Se sigue del Teorema 4. ■

Sean $n \geq 4$ un entero y sea $\sigma = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ una sucesión arbórea. Sea v un vértice de K_n tal que $\sigma(v) = 1$. Para cada u con $\sigma(u) > 1$ sea V_u el conjunto de vértices de $T_\sigma(K_n)$ que corresponden a árboles generadores que contienen a la arista terminal uv . Entonces sea $\Pi_{\sigma,v} = (V_{u_1}, \dots, V_{u_r})$ una partición del conjunto de vértices de $T_\sigma(K_n)$.

Lema 2. Sean n , σ , v y $\Pi_{\sigma,v}$ como en el párrafo anterior. Sea H_{u_i} para $i = 1, 2, \dots, r$ la subgráfica de $T_\sigma(K_n)$ inducida por el conjunto de vértices V_{u_i} . Sea $\lambda_{u_i} = (d_1^*, d_2^*, \dots, d_{u_i}^*, \dots, d_{n-1}^*)$ la sucesión arbórea para $K_n - v$ dada por $\lambda_{u_i}(u_i) = \sigma(u_i) - 1$ y $\lambda_{u_i}(w) = \sigma(w) \quad \forall w \neq u_i$. Entonces H_{u_i} es isomorfa a $T_{\lambda_{u_i}}(K_n - v)$.

Demostración. Probaremos que a cada vértice en H_{u_i} le podemos asignar un vértice en $T_\lambda(K_n - v)$ y viceversa. Para ello basta con ver que al quitar de un árbol correspondiente a un vértice en H_{u_i} la arista $e = u_i v$ y el vértice v , la sucesión arbórea correspondiente al árbol resultante será λ_{u_i} ya que solo quitaremos al vértice u_i una arista incidente y desaparecerá el vértice v . Un ejemplo de esto se puede ver en la Figura 3.3. Esta será la regla de correspondencia Θ . Usando este proceso al agregar a un árbol correspondiente a un vértice en $T_{\lambda_{u_i}}(K_n - v)$ el vértice v y la arista e tendremos un árbol que corresponderá a un vértice de H_{u_i} con la arista e .



Figura 3.3: Biyección entre árboles en H_{u_i} y $T_{\lambda_{u_i}}(K_n - v)$

Ahora debemos ver que dos vértices en H_{u_i} son adyacentes si y sólo si sus imágenes bajo Θ son adyacentes en $T_{\lambda_{u_i}}(K_n - v)$. Si dos vértices en H_{u_i} correspondientes a dos árboles P y Q son adyacentes, entonces existen aristas p y r de P distintas de e no incidentes y aristas q y s de Q distintas de e no incidentes tales que $Q = (P - \{p, r\}) + \{q, s\}$. Como las aristas son distintas de e entonces siguen siendo no incidentes y se cumple que $\Theta(Q) = (\Theta(P) - \{p, r\}) + \{q, s\}$. La otra implicación se prueba de manera similar. ■

Teorema 7. *Para cualquier sucesión arbórea σ , la gráfica $T_\sigma(K_n)$ es conexa*

Demostración. La afirmación es cierta trivialmente para $n = 1, 2, 3$. Para $n \geq 4$ se probará por inducción.

El caso base de la inducción, $n = 4$, se puede ver en la Figura 3.4. Sólo hay dos posibles sucesiones arbóreas esencialmente distintas para K_4 : $\sigma_1 = (1, 1, 1, 3)$ y $\sigma_2 = (1, 1, 2, 2,)$ y en la figura se puede observar que las dos gráficas de árboles con grados fijos son conexas.

Supongamos que para cierto entero $m \geq 4$ la gráfica $T_\lambda(K_m)$ es conexa para toda sucesión arbórea λ . Demostraremos que $T_\sigma(K_{m+1})$ es conexa para cualquier asignación σ .

Sean T_1 y T_2 dos árboles correspondientes a dos vértices en $T_\sigma(K_{m+1})$. Si los árboles T_1 y T_2 comparten una arista terminal e , observemos la subgráfica H de $T_\sigma(K_{m+1})$ en la que todos los árboles tienen a la arista e . Por el Lema 2 la subgráfica H es isomorfa a $T_\lambda(K_m)$ para una cierta sucesión arbórea λ y es conexa por hipótesis de inducción por lo que tanto en H como en $T_\sigma(K_{m+1})$ existe una trayectoria entre los vértices correspondientes a T_1 y T_2 .

Si T_1 y T_2 no comparten una arista terminal, entonces sea u un vértice terminal de T_1 y sea v el único vértice adyacente a u en T_1 . Como se tiene que $d_{T_1}(u) = 1 = \sigma(u) = d_{T_2}(u)$ entonces hay un único vértice $w \neq v$ adyacente a u en T_2 . Dado que w no es terminal existe un vértice x que no está en la uw -trayectoria en T_1 , la cual existe por que T_1 es conexo.

Entonces al quitar las aristas $\{u, v\}$ y $\{w, x\}$ en T_1 pondremos las aristas $\{x, u\}$ y $\{w, v\}$, dando como resultado un nuevo árbol T_3 adyacente a T_1 , el

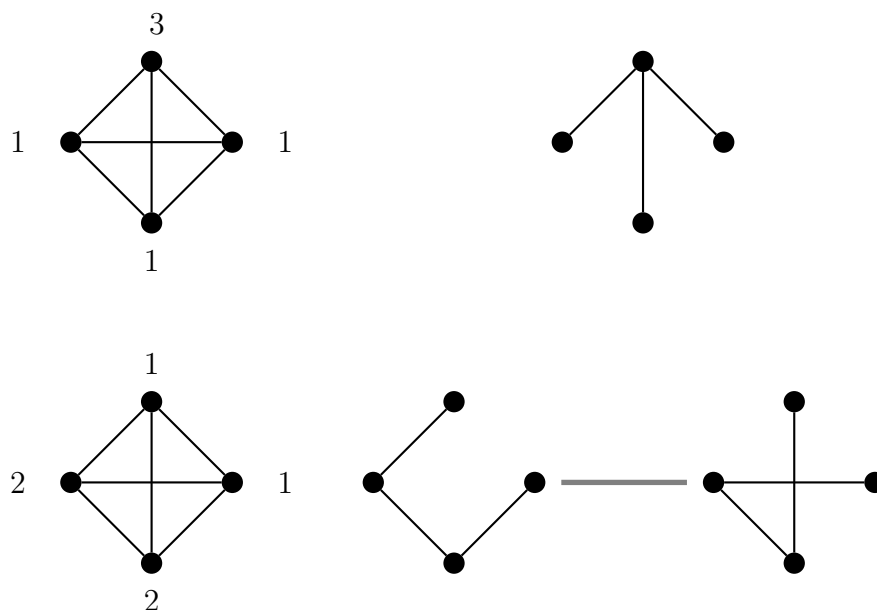


Figura 3.4: Caso base de la inducción sobre conexidad, $n = 4$

cual comparte la arista $\{u, w\}$, que es arista terminal, con el árbol T_2 , lo que nos remite al caso anterior. Por lo tanto $T_\sigma(K_{m+1})$ es conexa. ■

Así como vimos que la gráfica es conexa ahora observemos algo de su estructura. Por el Lema 2 podemos partir $T_\sigma(K_n)$ en copias isomorfas a varios $T_{\lambda_{u_i}}(K_{n-1})$ para las λ_{u_i} adecuadas usando la partición $\Pi_{\sigma,v} = (V_{u_1}, \dots, V_{u_r})$ donde v es un vértice tal que $\sigma(v) = 1$ y para $u = 1 \dots r$ V_{u_i} es el conjunto de vértices de $T_\sigma(K_n)$ que corresponden a árboles generadores que contienen a la arista terminal $u_i v$. Entre estas subgráficas hay ciertas adyacencias como se ve en el siguiente lema:

Lema 3. Sean σ una sucesión arbórea, P un árbol generador de K_n correspondiente a un vértice de $T_\sigma(K_n)$ y v un vértice de K_n con $\sigma(v) = 1$. Para cada vértice u no adyacente a v en P y con $\sigma(u) > 1$, existe un árbol generador Q de K_n , adyacente a P en $T_\sigma(K_n)$ tal que uv es arista de Q .

Demostración. Enraicemos P en el vértice v y denotemos por x al único vértice adyacente a v en P . Como x no es un vértice terminal y $x \neq u$

entonces u se encuentra en un nivel $k \geq 2$ y además por el mismo motivo, existe un vértice y adyacente a u en el nivel $k + 1$. Entonces al cambiar las aristas vx y uy por las aristas uv y xy , un árbol Q con los mismos grados de P y tal que la arista ux es arista de Q . ■

Esto nos permite dar una cota acerca del diámetro de la gráfica de árboles con grados fijos.

Teorema 8. *Sea $n \geq 4$. Para toda sucesión arbórea σ , $diam(T_\sigma(K_n)) \leq n - 3$*

Demostración: La demostración se hará por inducción sobre n . Para K_4 sólo se tienen dos sucesiones arbóreas: $\sigma_1 = (1, 1, 1, 3)$ y $\sigma_2 = (1, 1, 2, 2)$. El diámetro de $T_{\sigma_1}(K_4)$ es cero y el diámetro de $T_{\sigma_2}(K_4)$ es uno, como se ve en la Figura 3.4.

Supongamos que para un cierto entero $n \geq 4$ y para cualquier sucesión arbórea λ , $diam(T_\lambda(K_n)) \leq n - 3$. Demostraremos que $diam(T_\sigma(K_{n+1})) \leq n - 2$ para cualquier sucesión arbórea σ .

Partamos a $T_\sigma(K_{n+1})$, como en el párrafo anterior al Lema 2, en copias isomorfas a $T_{\lambda_{u_i}}(K_n)$. Sean u y v dos vértices de $T_\sigma(K_{n+1})$. Si u y v están en una de las copias de $T_{\lambda_{u_i}}(K_n)$, entonces $d(u, v) \leq diam(T_{\lambda_{u_i}}(K_n))$ que por hipótesis de inducción es menor que $n - 3$. Si u y v están en dos copias distintas de las $T_{\lambda_{u_i}}(K_n)$, entonces por el Lema 3, el vértice u es adyacente a un vértice en la copia en la que está el vértice v por lo que por hipótesis de inducción $d(u, v) \leq 1 + n - 3 = n - 2$. Por lo tanto $diam(T_\sigma(K_{n+1})) \leq n - 2$. ■

La factorización es esencialmente la misma sin importar cuál sea el vértice terminal que se elija. Con ayuda del Lema 3 podemos demostrar el siguiente teorema:

Teorema 9. *Sean $n \geq 4$ un entero y σ una sucesión arbórea. Para cada árbol generador P de K_n correspondiente a un vértice en $T_\sigma(K_n)$, existe una trayectoria hamiltoniana de $T_\sigma(K_n)$ con P como vértice inicial.*

Demostración. Se probará por inducción sobre n . En el caso de K_4 hay dos posibles sucesiones arbóreas: $\sigma_1 = (1, 1, 1, 3)$ y $\sigma_2 = (1, 1, 2, 2)$. Como se

puede ver en la Figura 3.4, $T_{\sigma_1}(K_4)$ consta de un sólo vértice y $T_{\sigma_2}(K_4)$ es una trayectoria de longitud 2.

Supongamos ahora que para un cierto entero $n \geq 4$, se cumple que para cualquier árbol generador P de K_n correspondiente a un vértice de $T_\lambda(K_n)$, existe una trayectoria hamiltoniana de $T_\lambda(K_n)$ que empieza en P . Demostraremos que el resultado es cierto para $T_\sigma(K_{n+1})$.

Partamos a $T_\sigma(K_{n+1})$, como en el párrafo anterior al Lema 2, en copias isomorfas a $T_{\lambda_{u_1}}(K_n), T_{\lambda_{u_2}}(K_n), \dots, T_{\lambda_{u_r}}(K_n)$. Sea P un árbol generador de K_n correspondiente a un vértice de $T_\sigma(K_{n+1})$. Sin pérdida de generalidad supongamos que P se encuentra en $T_{\lambda_{u_1}}(K_n)$. Por hipótesis de inducción existe una trayectoria hamiltoniana en $T_{\lambda_{u_1}}(K_n)$ que empieza en P y termina en un cierto vértice P_1 . Por el Lema 3 podemos pasar ahora del vértice P_1 a un vértice P_2 en $T_{\lambda_{u_2}}(K_n)$ de nuevo aplicamos hipótesis de inducción para recorrer toda esa componente y pasamos a por el Lema 3 pasamos a otra componente que no hayamos recorrido. Seguimos este proceso hasta recorrer todas las componentes. ■

Siguiendo la línea del resultado de Cummins [3] queremos ver si la gráfica de árboles con grados fijos es hamiltoniana. Respecto a esta propiedad presentamos dos resultados dependientes de las sucesiones arbóreas consideradas:

Teorema 10. *Si σ es una sucesión arbórea corresponde a una trayectoria y $n \geq 5$ entonces $T_\sigma(K_n)$ es hamiltoniana.*

Demostración: Haremos inducción sobre el número de vértices. De hecho probaremos que siempre existe una trayectoria hamiltoniana en $T_\sigma(K_n)$ entre $P = (1, 2, \dots, n)$ y $Q = (1, n - 1, n - 2, \dots, 2, n)$ que son dos trayectorias cuyos vértices correspondientes en $T_\sigma(K_n)$ son adyacentes. El caso base se puede ver en la Figura 3.5, podemos ver la trayectoria hamiltoniana y la adyacencia entre P y Q con una arista punteada.

Supongamos que si σ es una sucesión arbórea que corresponde a una trayectoria, entonces $T_\sigma(K_m)$ tiene una trayectoria hamiltoniana entre $P_m = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ y $Q_m = (v_1, v_{m-1}, v_{m-2}, \dots, v_2, v_m)$.

Demostraremos que en $T_\sigma(K_{m+1})$ existe una trayectoria hamiltoniana entre los vértices correspondientes a las trayectorias $P_{m+1} = (1, 2, \dots, m, m + 1)$

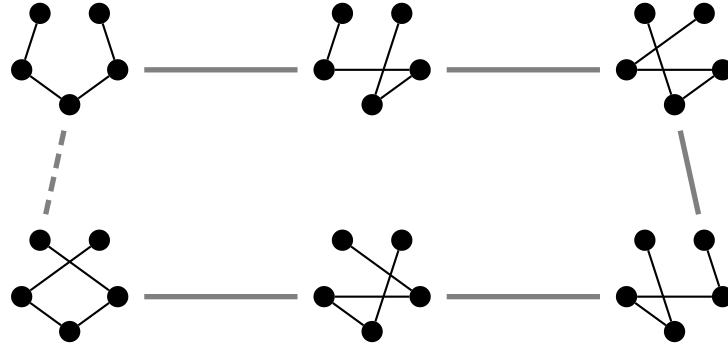


Figura 3.5: Caso base de la inducción sobre hamiltonicidad de las trayectorias, $n = 5$

y $Q_{m+1} = (1, m, m - 1, \dots, 2, m + 1)$. Partamos a $T_\sigma(K_{m+1})$ como en el párrafo anterior al Lema 2, usando el vértice inicial de la trayectoria P_{m+1} , en copias isomorfas a $T_{\lambda_{u_i}}(K_m)$. Notemos que las sucesiones arbóreas λ_{u_i} también corresponden a trayectorias. Asignemos el número i a la subgráfica inducida $T_{\lambda_{u_i}}(K_m)$ que contiene la arista $\{1, i\}$.

Sean $P_{m+1}^i = (1, i + 1, i + 2, \dots, m - 1, m, 2, 3, \dots, i - 1, i, m + 1)$ y $Q_{m+1}^i = (1, i + 1, i, i - 1, \dots, 3, 2, m, m - 1, \dots, i + 2, m + 1)$. En cada una de las $T_{\lambda_{u_i}}(K_m)$, etiquetemos los vértices en el orden en que aparecen en P_{m+1}^i es decir

$$\begin{aligned}
 1 &\rightarrow v_0 \\
 i + 1 &\rightarrow v_1 \\
 i + 2 &\rightarrow v_2 \\
 &\vdots \\
 m + 1 &\rightarrow v_m
 \end{aligned}$$

Notemos que con esta etiquetación $P_{m+1}^i = v_0 P_m$ y $Q_{m+1}^i = v_0 Q_m$. Por hipótesis de inducción existe una trayectoria hamiltoniana R_i en cada copia de $T_{\lambda_{u_i}}(K_m)$ que va desde P_{m+1}^i hasta Q_{m+1}^i . Notemos que al quitar las aristas $\{1, i + 1\}$ y $\{i + 2, m + 1\}$ de Q_{m+1}^i obtendremos la trayectoria P_{m+1}^{i+1} , por lo que los vértices correspondientes a estas trayectorias son adyacentes en $T_\sigma(K_{m+1})$.

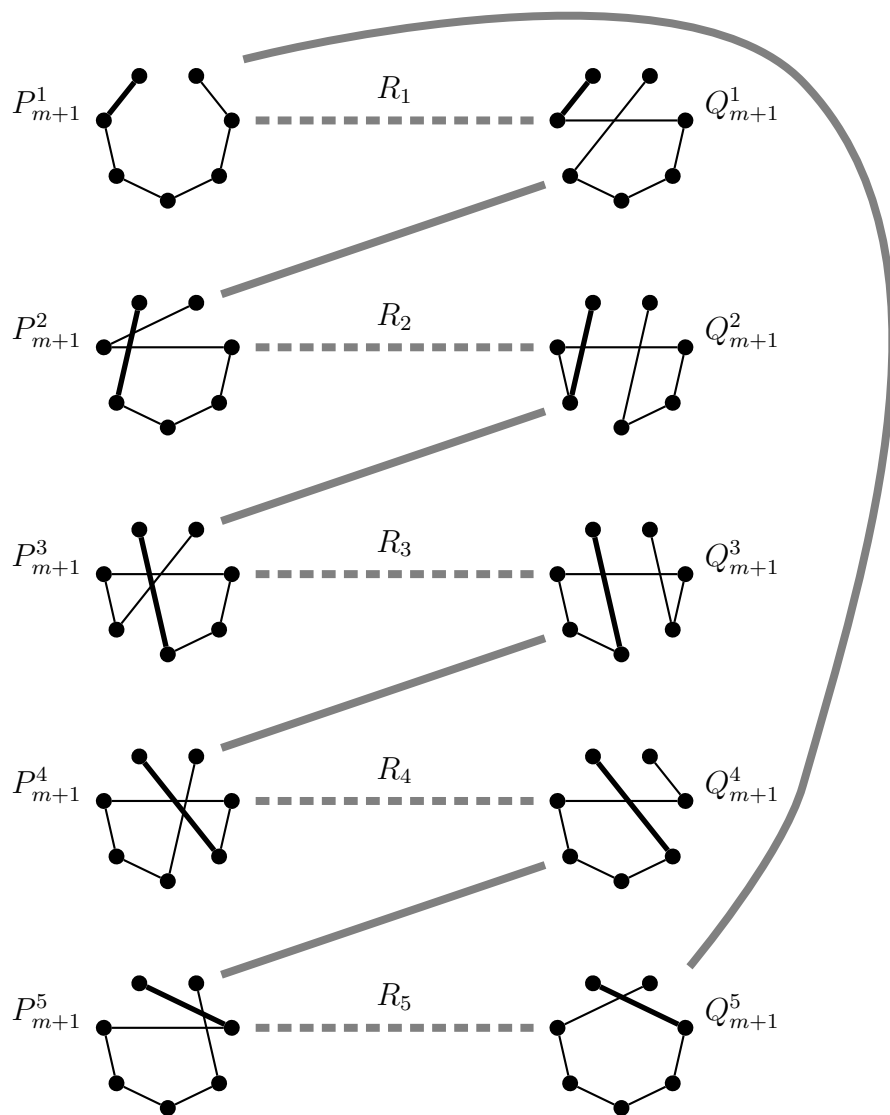


Figura 3.6: Un ciclo hamiltoniano en $T_\sigma(K_7)$ con $\sigma = (1, 1, 2, 2, 2, 2, 2)$

De esta manera obtenemos una trayectoria hamiltoniana de la forma $P_{m+1} = P_{m+1}^1, R_1, Q_{m+1}^1, P_{m+1}^2, R_2, Q_{m+1}^2, \dots, P_{m+1}^{m-1}, R_{m-1}, Q_{m+1}^{m-1} = Q_{m+1}$. Dado que los vértices correspondientes a P_{m+1} y Q_{m+1} son adyacentes, entonces $T_\sigma(K_{m+1})$ es hamiltoniana. Podemos ver un ejemplo de la construcción de este ciclo en la Figura 3.6 para $T_\sigma(K_7)$ con $\sigma = (1, 1, 2, 2, 2, 2, 2)$. ■

También tenemos este otro resultado mediante un argumento de conteo

Teorema 11. Si $\sigma = (1, 1, \dots, 1, 2, n-2)$ entonces $T_\sigma(K_n)$ es isomorfa a K_{n-2} .

Demostración: Por el Teorema 6, $T_\sigma(K_n)$ tiene

$$\binom{n-2}{n-3, 1, 0, \dots, 0} = \frac{n-2!}{n-3!} = n-2$$

vértices. Por otro lado por el Teorema 5, la gráfica es regular de grado

$$\begin{aligned} \binom{n}{2} - \binom{(n-2) + 2^2 + (n-2)^2}{2} &= \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-2)(n-1)}{2} - 2 \\ &= (n-1) \left(\frac{n-n+2}{2} \right) - 2 \\ &= n-3, \end{aligned}$$

es decir, en $T_\sigma(K_n)$ cada uno de los $n-2$ vértices es adyacente a los $n-3$ restantes y por lo tanto la gráfica es isomorfa a K_{n-2} . ■

Análogamente a la gráfica de árboles, podemos definir una versión geométrica de la gráfica de árboles con grados fijos: sea σ una sucesión arbórea, sea $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ un conjunto de $n \geq 3$ puntos en el plano en posición convexa y sea $K(P)$ la gráfica geométrica completa con conjunto de vértices P . Definimos la gráfica de árboles planos con grados fijos de $K(P)$, denotada por $\bar{T}_\sigma(K(P))$ como la gráfica cuyo conjunto de vértices es el conjunto de árboles generadores planos H de $K(P)$ tales que $d_H(p_i) = \sigma(p_i)$, y en la cual dos árboles H y K son adyacentes si existen aristas h_1 y h_2 de H y k_1 y k_2 de K tales que $K = (H - \{h_1, h_2\}) + \{k_1, k_2\}$.

A diferencia del caso abstracto, si una sucesión arbórea se obtiene de otra permutando sus elementos, las gráficas de árboles planos con grados fijos pueden ser muy distintas como se puede ver en la Figura 3.7. Para el problema de la gráfica de árboles geométricos con grados fijos, $\bar{T}_\sigma(K_n)$, probamos la conexidad para sucesiones arbóreas que corresponden a trayectorias.

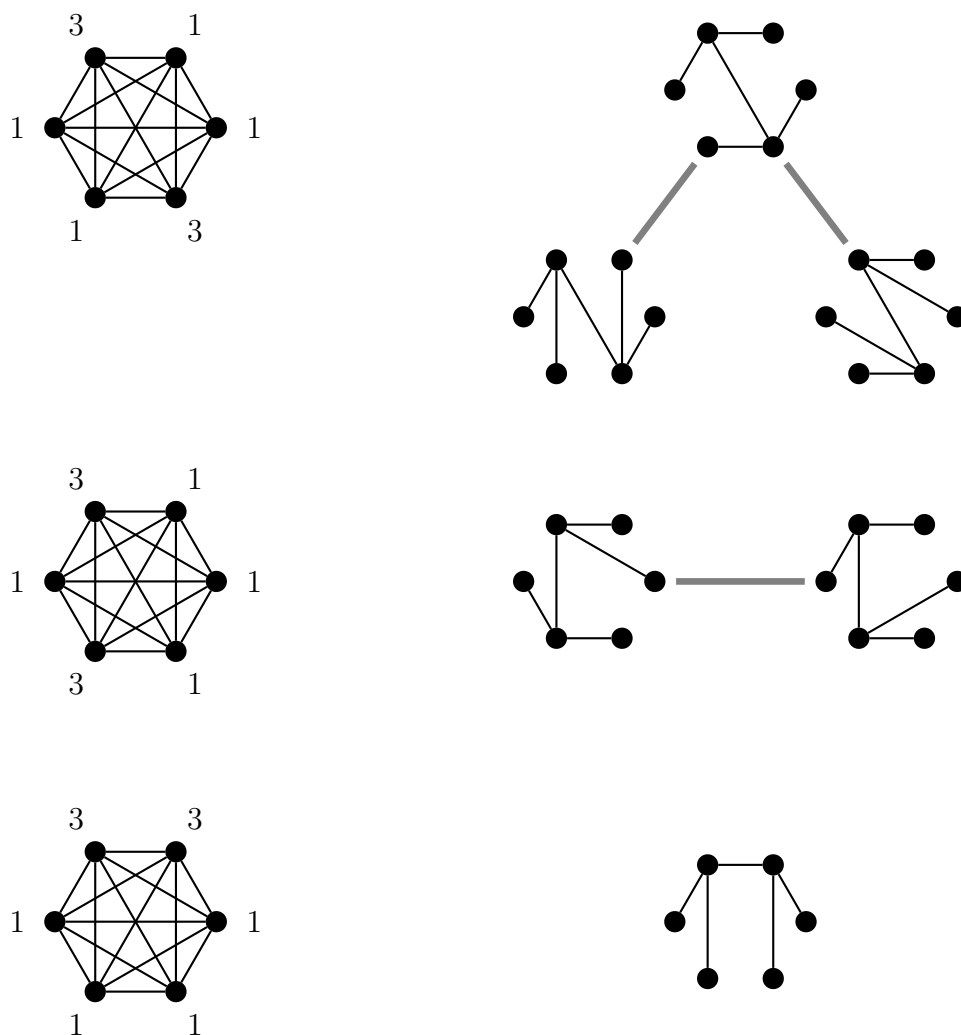


Figura 3.7: $\bar{T}_\sigma(K_6)$ con distintas permutaciones de la sucesión arbórea $\sigma = (1, 1, 1, 1, 3, 3)$

Teorema 12. Sean $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ un conjunto de $n \geq 3$ puntos del plano en posición convexa y $K(P)$ la gráfica geométrica completa con conjunto de vértices P . Si σ es una sucesión arbórea correspondiente a una trayectoria, entonces la gráfica $\bar{T}_\sigma(K_n)$ es conexa.

La demostración se hará por inducción sobre el número de vértices de $K(P)$.

En el caso base hay esencialmente dos gráficas como se puede ver en la Figura 3.8.

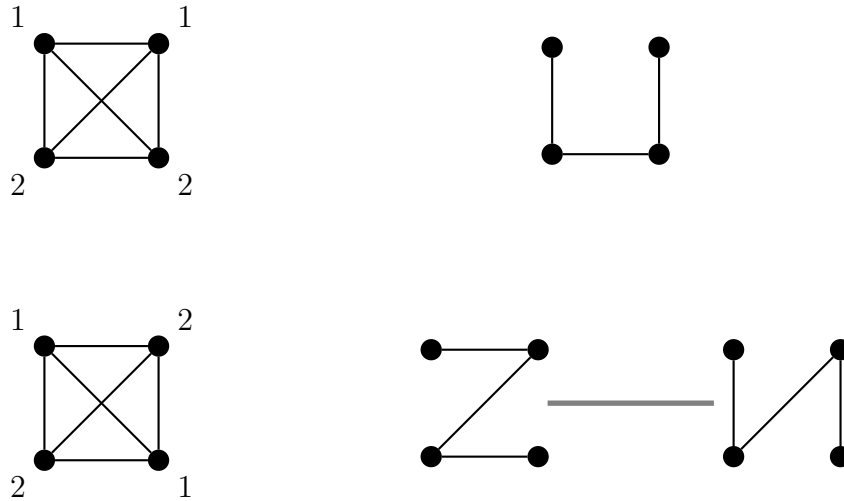


Figura 3.8: Caso base de la conexidad de trayectorias en el caso geométrico, $n = 4$

Para un cierto entero $m \geq 4$ supongamos que si la sucesión arbórea λ corresponde a una trayectoria, entonces la gráfica $\bar{T}_\lambda(K_m)$ es conexa. Demostraremos que si la sucesión arbórea σ corresponde a una trayectoria, entonces la gráfica $\bar{T}_\sigma(K_{m+1})$ es conexa.

Consideremos los vértices en posición convexa numerados cíclicamente. Sin pérdida de generalidad supongamos que el vértice v_1 es un vértice tal que $\sigma(v_1) = 1$. Como cualquier arista terminal de una trayectoria plana se encuentra en el casco convexo, entonces podemos dividir los vértices de la gráfica $\bar{T}_\sigma(K_{m+1})$ en dos partes: los que contienen a la arista v_1v_2 y los que contienen a la arista v_1, v_{m+1} .

Si una de estas partes es vacía, esto implica que los dos vértices terminales están juntos en el orden del casco convexo y entonces la gráfica $\bar{T}_\sigma(K_{m+1})$ tiene un sólo vértice y el resultado se cumple.

Si ninguna es vacía, entonces cada una de las partes es isomorfa a $\bar{T}_\sigma(K_m)$ y

por hipótesis de inducción es conexa. Dentro de las trayectorias que tienen a la arista v_1v_2 siempre podremos encontrar a la trayectoria $v_1, v_2, v_{m+1}, v_j, \dots$ donde $v_j = v_3$ ó $v_j = v_m$. En cualquiera de los dos casos al cambiar las aristas v_1v_2 y $v_{m+1}v_j$ obtendremos las aristas v_1v_{m+1} y v_2v_j y por lo tanto una nueva trayectoria $v_1, v_{m+1}, v_2, v_j, \dots$ que se encuentra en la componente de las que empiezan con la arista v_1v_{m+1} .

Por lo tanto la gráfica $\bar{T}_\sigma(K_{m+1})$ es conexa. ■

Conclusiones

Die ungelösten Probleme halten einen Geist
lebendig und nicht die gelösten.¹

Erwin Guido Kolbenheyer

La idea de este trabajo surgió en la Segunda Escuela Mexicana de Invierno en Matemáticas Discretas con la siguiente pregunta de Ricardo Strausz al expositor Jorge Urrutia: ¿Será cierto que quitando y poniendo dos aristas de manera que se preserven los grados, la conexidad y que no haya ciclos, podemos llegar de cualquier árbol con una sucesión de grados fija, a cualquier otro con la misma sucesión?. Después de demostrar la conexidad de la gráfica de árboles con grados fijos empezamos a preguntarnos sobre más de sus propiedades y, de hecho, aún quedan varias preguntas que no hemos solucionado.

Con respecto al caso geométrico, además de las sucesiones arbóreas σ , correspondientes a trayectorias, todos los ejemplos que hemos hecho indican que la gráfica $\bar{T}_\sigma(K_n)$ es conexa, por lo que nos gustaría poder demostrarlo. También nos gustaría dar cotas para el diámetro de estas gráficas cuando menos para el caso en que σ corresponde a una trayectoria. Por otro lado en el caso abstracto probamos que la gráfica $T_\sigma(K_n)$ es hamiltoniana para

¹Son los problemas sin resolver los que mantienen activa la mente.

dos clases de sucesiones arbóreas. Conjeturamos que es hamiltoniana para cualquier sucesión arbórea σ .

Cuando $\sigma = (1, 1, 2, \dots, 2)$ creemos que cada arista en $T_\sigma(K_n)$ está en un ciclo hamiltoniano. Además conjeturamos que la cota que dimos para el diámetro es justa sólo en este caso. En fin, cada nueva respuesta abre camino a nuevas preguntas.

Referencias

- [1] D. Avis y K. Fukuda, «Reverse Search for Enumeration,» *Discrete Applied Mathematics*, Vol 65, 21-46 (1966).
- [2] P.A. Cayley, «A Theorem on Trees,» *Quart. J. Math.* Vol. 23, 376-378 (1889).
- [3] R. L. Cummins, «Hamilton Circuits in Tree Graphs,» *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-13, 82-90 (1966).
- [4] Diestel R. 2000. **Graph Theory**. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York.
- [5] C. Hernando, F. Hurtado, A. Márquez, M. Mora, M. Noy, «Geometric tree graphs of points in convex position,» *Discrete Applied Mathematics*, Vol 93, 51-66 (1999).
- [6] E. Rivera-Campo y V. Urrutia-Galicia, «Hamilton cycles in the path graph of a set of points in convex position,» *Computational Geometry Theory and Applications*, Vol 18, 65-72 (2001).
- [7] H. Prüfer, «Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen,» *Arch. Math. Phys.*, Vol 27, 742-744 (1918).
- [8] H. Shank, «A Note on Hamiltonian Circuits in Tree Graphs, » *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-15, 86 (1968).